

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Факультет математики і інформатики

Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

бакалавра

на тему *«Задача керованості для одного класу нелінійних однорідних систем»*

Виконав:

студент групи МП-41

4 курсу

спеціальність 113 – прикладна математика
освітньо-професійна програма «Прикладна
математика»

Пилипець К.К.

Науковий керівник: професор факультету
математики і інформатики, доктор фіз.-мат.
наук

Ігнатович С.Ю.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук, старший
науковий співробітник
Фізико-технічного інституту низьких
температур ім. Б.І. Веркіна
Національної академії наук України

Халіна К.С

Харків – 2025 рік

Анотація.

Пилипець Кирило Костянтинович, *«Задача керованості для одного класу нелінійних однорідних систем»*.

У цій роботі проаналізовано деякі приклади задач керованості в нелінійних системах із поліноміальними за часом керуваннями; було знайдено множину початкових точок, для яких задачі керованості мають розв'язки з множини допустимих керувань; наведено алгоритм знаходження керувань, які переводять систему із заданої початкової точки в початок координат за заданий час, із декількома прикладами для ілюстрації.

Ключові слова: нелінійні керовані системи, явний розв'язок задачі керованості.

Abstract.

Pylypets Kyrylo Kostyantynovych, *«Controllability problem for one class of nonlinear homogeneous systems»*.

Some of the examples of control problems in nonlinear systems with time-polynomial controls are analyzed; the sets of initial points for which these control problems can be solved are found; the algorithm of finding admissible controls which steer these systems from an initial point to the zero point is described, with some examples to illustrate it.

Keywords: nonlinear control systems, explicit solution of controllability problem.

Зміст.	
Вступ.....	4
Розділ 1.....	7
Постановка та аналіз задачі.....	7
Знаходження розв’язків.....	12
Приклади.....	12
Розділ 2.....	14
Постановка та аналіз задачі.....	14
Знаходження розв’язків.....	16
Приклади.....	16
Використані джерела.....	19

Вступ.

Задача керованості, тобто побудова керування, яке переводить систему із заданої точки в іншу задану точку, є одною з центральних задач у математичній теорії керування. Відомо, що для системи лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

яка задовольняє умову критерію керованості Калмана

$$rg(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n,$$

можна явно знайти керування, яке переводить цю систему з однієї заданої точки в іншу за заданий час. Для канонічних систем, тобто для систем вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} \end{cases}$$

зазначене керування є поліноміальним і має степінь $n - 1$.

Для нелінійних систем, проте, розв'язання задач керованості може бути дуже складним. Тому має сенс розглядати окремі класи нелінійних систем. Наприклад, якщо система лінеаризовна, тобто за допомогою певного відображення зводиться до лінійної, це можна використати в побудові керувань.

У статті [1] було запропоновано ідею розв'язування задач керованості в класі так званих майже лінеаризовних систем – нелінійних систем, для яких існує відображення, що зводить усі, крім одного, рівняння таких систем до лінійного вигляду; подальшого розвитку ця ідея набула в статті [2]. До того ж, детальніше в статті [1] було описано клас систем, у яких усі рівняння, крім одного, становили лінеаризовну систему, причому таку, що відображення на лінійну систему можна побудувати в явному вигляді, а отримана лінійна система є канонічною. Ідея полягає в побудові поліноміальних керувань степеня n , у яких один із коефіцієнтів розглядається як параметр і підбирається таким чином, щоб виконувалися крайові умови для нелінійного рівняння (зауважимо, що побудова саме поліноміальних керувань є не обов'язковою,

але найпростішою). У зазначених статтях були наведені приклади використання такого методу, проте не надано умов, за яких можна побудувати необхідне керування.

Таким чином, виникла зацікавленість у розв'язанні задач керованості для певних класів систем, де в якості множини керувань обирається клас поліноміальних за часом функцій. У цій роботі обмежуємось аналізом класу «двоїстих до лінійних» систем, введених і досліджених у статті [4]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = P_2(x_1), \\ \dots \\ \dot{x}_n = P_n(x_1), \end{cases} \quad (1)$$

$$u = u(t), 0 \leq t \leq \theta,$$

де $P_i(x)$ – аналітичні функції. У роботі [4] детально досліджено задачі швидкодії для таких систем у випадку, коли початок координат є кінцевою точкою, з обмеженням на допустимі керування $|u| \leq 1$; також було отримано загальні теореми про вигляд оптимальних керувань.

Окремо варто згадати такі тривимірні приклади систем вигляду (1), як

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_1^2 \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_1^3, \end{cases}$$

$$u = u(t), t \in [0, \theta].$$

з обмеженням на керування $|u| \leq 1$. Для цих систем у роботах [5] і [3] відповідно детально досліджено задачу переходу в початок координат за мінімальний час, а також у явному вигляді побудовано оптимальні керування. Зауважимо, що обидві ці системи однорідні, що полегшує дослідження. При цьому перша система не є керованою, тому для неї виникає окреме питання щодо множини точок, із яких можливий перехід у початок координат.

У цій роботі дослідимо задачу переходу в початок координат для зазначених вище систем, і в якості множини допустимих керувань оберемо клас квадратичних за часом функцій. Мета роботи – для обох цих систем знайти множину точок, із яких можливе потрапляння в початок координат за фіксований або вільний час, та побудувати відповідне керування.

Розділ 1.

Постановка та аналіз задачі.

Розглянемо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_1^2; \end{cases} \quad (2)$$

$$u = u(t), t \in [0, \theta], x(0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0), x(\theta) = (0, 0, 0).$$

Нашою метою буде знайти для довільної точки (x_1^0, x_2^0, x_3^0) розв'язок задачі керованості системи (2) з фіксованої множини допустимих керувань, а також знайти множину таких точок (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , для яких задача керованості має розв'язки з цієї множини. У якості множини допустимих керувань для аналізу цієї задачі було обрано множину квадратичних за часом керувань: $\Omega = \{u(t) = at^2 + bt + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Спочатку зауважимо, що система (2) не є керованою. Скористаємося визначенням керованої системи, наведеним у книзі [6] (див. стор. 511). Тут наведемо його з деякими уточненнями.

Визначення. Нелінійна система вигляду

$$\dot{x} = f(x, u)$$

називається керованою, якщо для будь-яких двох точок x^1, x^0 існують час θ і допустиме керування, визначене на $[0, \theta]$, такі, що для $x(0) = x^0$ отримаємо $x(\theta) = x^1$.

У даному випадку неважко навести контрприклад, який підтверджує, що система (2) не є керованою: дійсно, оскільки з рівняння $\dot{x}_3 = x_1^2$ видно, що x_3 не може зменшуватися з часом, тому для $x(0) = (0, 0, 1)$ та $x(\theta) = (0, 0, 0)$ не існує допустимих керувань. До того ж, для $x(0) \neq (0, 0, 0)$ координата x_3 збільшиться за ненульовий час θ , тобто $x_3(\theta) > x_3(0)$.

Аналіз системи почнемо з розгляду перших двох рівнянь системи (2):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases} \quad (3)$$

Нехай шукане керування u має вигляд $u(t) = at^2 + bt + c$. Тоді, зафіксувавши час θ , проінтегруємо обидві частини цих двох рівнянь, при цьому отримаємо:

$$x_1^0 = -\frac{a}{3}\theta^3 - \frac{b}{2}\theta^2 - c\theta;$$

$$x_2^0 = \frac{a}{4}\theta^4 + \frac{b}{3}\theta^3 + \frac{c}{2}\theta^2.$$

Звідси отримаємо вираз для параметрів b та c через параметри x_1^0, x_2^0, θ та a :

$$b = \frac{6}{\theta} \left(\frac{x_1^0}{\theta} + \frac{2x_2^0}{\theta^2} \right) - a\theta; \quad (4)$$

$$c = -\frac{x_1^0}{\theta} - 3 \left(\frac{x_1^0}{\theta} + \frac{2x_2^0}{\theta^2} \right) + \frac{a\theta^2}{6}. \quad (5)$$

Таким чином, знайшли спосіб однозначно при фіксованих x_1^0, x_2^0 і θ виразити відповідне керування $u(t)$, яке б перевело систему (3) з точки (x_1^0, x_2^0) в нульову точку за час θ .

Тепер повернемося до системи (2). Інтегруючи третє рівняння цієї системи з урахуванням співвідношень (4) і (5), отримаємо:

$$x_3^0 = -\frac{x_1^0 x_2^0}{5} - \frac{6(x_2^0)^2}{5\theta} - \frac{2(x_1^0)^2 \theta}{15} - \frac{ax_1^0 \theta^4}{180} - \frac{a^2 \theta^7}{7560}.$$

Позначимо множники при степенях a :

$$S_0 = \frac{x_1^0 x_2^0}{5} + \frac{6(x_2^0)^2}{5\theta} + \frac{2(x_1^0)^2 \theta}{15}, \quad S_1 = \frac{x_1^0 \theta^4}{180}, \quad S_2 = \frac{\theta^7}{7560},$$

виділимо повний квадрат лінійної за параметром a частини, представимо отриману рівність у такому вигляді:

$$x_3^0 = -(S_0 + S_1 a + S_2 a^2) = -\left(\sqrt{S_2} a + \frac{S_1}{2\sqrt{S_2}} \right)^2 - \left(S_0 - \frac{S_1^2}{4S_2} \right). \quad (6)$$

Розглянемо вираз

$$-\left(S_0 - \frac{S_1^2}{4S_2} \right) = -\frac{3(x_1^0)^2 \theta}{40} - \frac{x_1^0 x_2^0}{5} - \frac{6(x_2^0)^2}{5\theta}.$$

Таким чином для довільної точки (x_1^0, x_2^0, x_3^0) та фіксованого часу θ можемо визначити, чи існуватиме розв'язок задачі керованості (2): якщо виконується нерівність

$$x_3^0 \leq -\frac{3(x_1^0)^2\theta}{40} - \frac{x_1^0 x_2^0}{5} - \frac{6(x_2^0)^2}{5\theta},$$

то з рівності (6) можемо знайти значення параметра a , завдяки чому матимемо можливість визначити шуканий розв'язок; якщо ж вона не виконується, доходимо висновку, що розв'язку немає. Як можна помітити, існують випадки, коли при заданих (x_1^0, x_2^0, x_3^0) та θ існують два різні дійсні значення a , які задовольняють рівності (6) та відповідають двом різним керуванням.

Перейдемо до більш детального аналізу нерівності

$$x_3^0 \leq -\frac{6}{5} \frac{(x_2^0)^2}{\theta} - \frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 - \frac{3}{40} (x_1^0)^2 \theta,$$

але тепер не фіксуємо θ . Знайти множину точок (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , для яких існують розв'язки задачі керованості (2) за будь-який час, зможемо, визначивши умови на x_1, x_2, x_3 , при виконанні яких ця нерівність має додатні розв'язки (якщо її розв'язувати відносно θ). Зведемо її до квадратної нерівності відносно θ :

$$\frac{3}{40} (x_1^0)^2 \theta^2 + \left(\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 + x_3^0 \right) \theta + \frac{6}{5} (x_2^0)^2 \leq 0; \quad (7)$$

Знайдемо корені лівої частини:

$$D = \left(\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 + x_3^0 \right)^2 - \frac{9}{25} (x_1^0 x_2^0)^2;$$

$$\theta_{1,2} = \frac{-\left(\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 + x_3^0 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 + x_3^0 \right)^2 - \frac{9}{25} (x_1^0 x_2^0)^2}}{\frac{3}{20} (x_1^0)^2}.$$

Таким чином, отримаємо наступну систему умов:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 + x_3^0 \right)^2 - \frac{9}{25} (x_1^0 x_2^0)^2 \geq 0, \\ -\left(\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 + x_3^0 \right) + \sqrt{\left(\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 + x_3^0 \right)^2 - \frac{9}{25} (x_1^0 x_2^0)^2} > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Перша умова з цієї системи забезпечує наявність дійсних розв'язків, а друга – те, що принаймні один із них буде додатним. Отже, проаналізувавши ці умови, можна дійти висновків щодо того, з яких точок можна буде перевести систему в нуль, а з яких – ні.

Проаналізуємо першу. Перепишемо її таким чином:

$$\left(\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 + x_3^0\right)^2 \geq \frac{9}{25}(x_1^0x_2^0)^2,$$

або:

$$\left|\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 + x_3^0\right| \geq \frac{3}{5}|x_1^0x_2^0|.$$

Для подальшого аналізу розглянемо два випадки: $x_1^0x_2^0 > 0$ і $x_1^0x_2^0 < 0$; при $x_1^0x_2^0 = 0$ нерівність виконується автоматично.

У випадку $x_1^0x_2^0 > 0$ маємо два можливі випадки з урахуванням знаку виразу $\left(\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 + x_3^0\right)$:

$\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 + x_3^0 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x_1^0x_2^0 + x_3^0 \geq \frac{3}{5}x_1^0x_2^0 \Rightarrow x_3^0 \geq \frac{2}{5}x_1^0x_2^0$ – суперечить умові $x_3^0 < 0$;

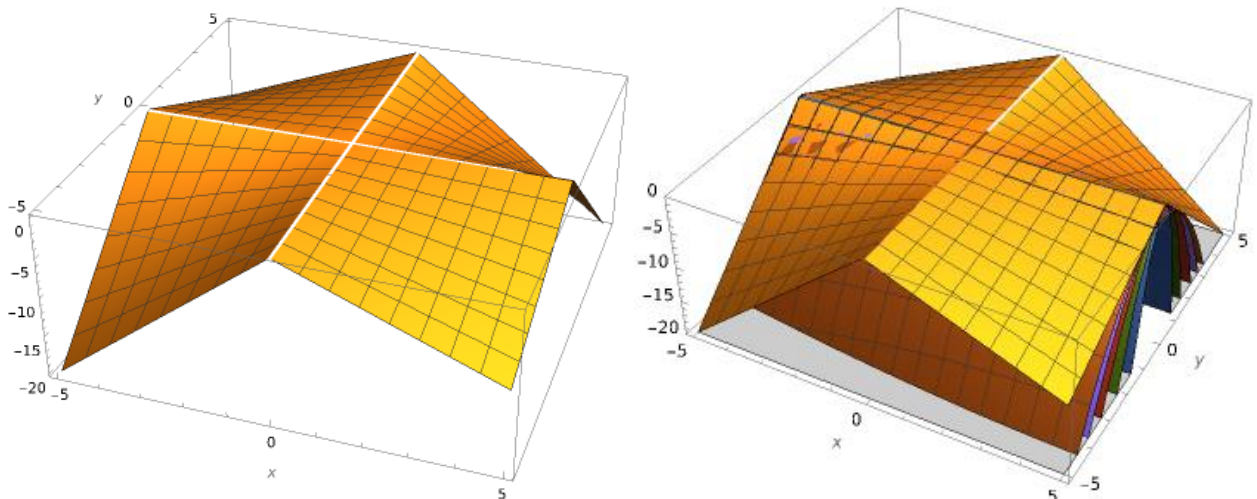
$\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 + x_3^0 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 - x_3^0 \geq \frac{3}{5}x_1^0x_2^0 \Rightarrow x_3^0 \leq -\frac{4}{5}x_1^0x_2^0$ – можлива умова.

При $x_1^0x_2^0 < 0$ можливий лише один випадок: $\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 + x_3^0 < 0$. Тоді:

$\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 + x_3^0 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 - x_3^0 \geq -\frac{3}{5}x_1^0x_2^0 \Rightarrow x_3^0 \leq \frac{2}{5}x_1^0x_2^0$ – єдина можлива умова.

Таким чином, отримали необхідну умову існування розв'язків нерівності (7). Далі проаналізуємо другу умову, виконання якої означає, що серед наявних розв'язків є додатні. Для цього перепишемо нерівність із другої умови системи (8) таким чином:

$$\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 + x_3^0 < \sqrt{\left(\frac{1}{5}x_1^0x_2^0 + x_3^0\right)^2 - \frac{9}{25}y^2x^2}.$$



Мал. 1. Поверхня $x_3 = P(x_1, x_2)$ (зліва), огинаюча родини поверхонь $x_3 = -\frac{6}{5} \frac{x_2^2}{\theta} - \frac{1}{5} x_1 x_2 - \frac{3}{40} x_1^2 \theta$ (справа).

Припускаючи, що дійсні розв'язки існують (тобто вираз під знаком кореня залишається невід'ємним), проаналізуємо нерівність у залежності від знаку виразу $\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 + x_3^0$; при $\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 + x_3^0 > 0$ нерівність не може виконуватись, а при $\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 + x_3^0 < 0$ завдяки невід'ємності кореня виконується автоматично, отже, умову можна звести до такої: $x_3^0 < -\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0$. Проте, зважаючи на нерівності, отримані при аналізі першої умови системи (8), можна побачити, що отримана з другої умови не надає якихось додаткових обмежень. Дійсно, при $x_1^0 x_2^0 > 0$ виконується нерівність $-\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 > -\frac{4}{5} x_1^0 x_2^0$, а при $x_1^0 x_2^0 < 0$ отримуємо: $-\frac{1}{5} x_1^0 x_2^0 > 0 > \frac{2}{5} x_1^0 x_2^0$, тобто ця умова не дає більш сильних обмежень.

Розглянемо таку кусково-задану функцію:

$$P(x_1, x_2) = \begin{cases} -\frac{4}{5} x_1 x_2, & x_1 x_2 > 0, \\ \frac{2}{5} x_1 x_2, & x_1 x_2 < 0, \\ 0, & x_1 x_2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Поверхню, задану рівнянням $x_3 = P(x_1, x_2)$, показано на малюнку 1. Вона є верхньою огинаючою родини поверхонь

$$x_3 = -\frac{6}{5} \frac{x_2^2}{\theta} - \frac{1}{5} x_1 x_2 - \frac{3}{40} x_1^2 \theta.$$

За підсумками вищезазначеного можемо сформулювати наступну теорему:

Теорема 1. Множина досяжності системи (2) за допомоги керувань вигляду $u(t) = at^2 + bt + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ за будь-який час має вигляд:

$$R = \{(x_1, x_2, x_3) | (x_3 \leq P(x_1, x_2) \wedge x_3 < 0)\},$$

де $P(x_1, x_2)$ кусково-задана функція вигляду (9).

Знаходження розв'язків.

Таким чином, можна навести алгоритм розв'язання задачі керованості для системи (2):

- 1) Порівнявши x_3^0 із $P(x_1^0, x_2^0)$, визначаємо, чи існує час θ , для якого існують розв'язки задачі керованості, які переведуть систему (2) з точки x^0 в 0 за час θ .
- 2) Знаходимо розв'язки нерівності (7) для заданої точки, так ми знайдемо множину можливих значень часу θ .
- 3) Фіксуємо час θ , який належить до множини розв'язків нерівності (7).
- 4) Розв'язуємо рівняння (6) для знаходження параметра a , із співвідношень (4) та (5) визначаємо параметри b та c .

Приклади.

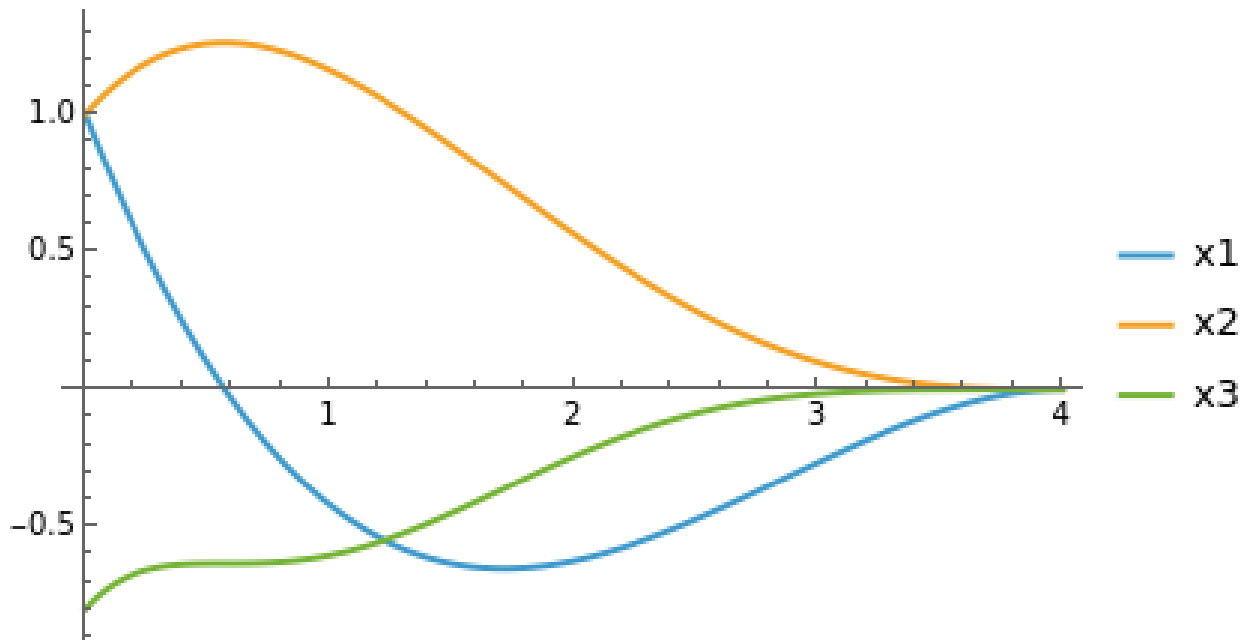
Наведемо декілька прикладів використання цього алгоритму для пошуку розв'язків задачі керованості для різних точок:

1) $x(0) = \left(1, -1, -\frac{1}{5}\right)$:

Оскільки для цієї точки $P(1, -1) = -\frac{2}{5} > -\frac{1}{5}$, то в цьому випадку розв'язків немає.

2) $x(0) = \left(1, 1, -\frac{4}{5}\right)$:

Для цієї точки $P(1, 1) = -\frac{4}{5} = x_3^0$, отже, перейдемо до розв'язання нерівності $\frac{3}{40}\theta^2 - \frac{3}{5}\theta + \frac{6}{5} \leq 0$; вона має єдиний розв'язок $\theta = 4$, і тоді отримаємо одне значення параметра a , яке є розв'язком рівняння (6) і одне відповідне керування: $u(t) \approx -0.328t^2 + 1.875t - 2.25$. Це



Малюнок 2. Графіки компонент траєкторії для $x(0) = (1, 1, -\frac{4}{5})$.

керування є єдиним розв'язком цієї задачі керованості. Графіки залежності компонент від часу можна побачити на малюнку 2.

3) $x(0) = (1, 1, -5)$:

Для цієї точки $x_3^0 = 5 < P(1, 1) = -\frac{4}{5}$; нерівність $\frac{3}{40}\theta^2 - 4\frac{4}{5}\theta + \frac{6}{5} \leq 0$

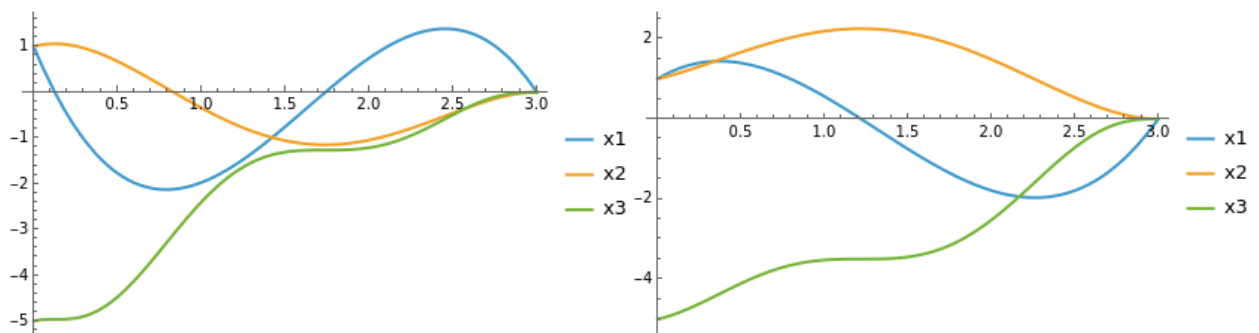
має множину розв'язків $4(8 - 3\sqrt{7}) \leq \theta \leq 4(8 + 3\sqrt{7})$. Задавши час

$\theta = 3$, отримаємо два різні значення параметра a , які є розв'язками

рівняння (5) і відповідають двом різним керуванням: $u_1(t) \approx$

$\approx -4.577 t^2 + 14.841 t - 8.865$; $u_2(t) \approx 3.021 t^2 - 7.952 t - 2.532$.

Графіки залежності компонент від часу можна побачити на малюнку 3.



Мал. 3. Графіки компонент траєкторій для $x(0) = (1, 1, -\frac{4}{5})$ для керувань $u_1(t)$ (зліва) та $u_2(t)$ (справа) при заданому часі $\theta = 3$.

Розділ 2.

Постановка та аналіз задачі.

Перейдемо до аналізу задачі керованості в іншій схожій нелінійній системі:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_1^3; \end{cases} \quad (10)$$

$$u = u(t), t \in [0, \theta], x(0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0), x(\theta) = (0, 0, 0).$$

$$u(t) = at^2 + bt + c, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Проведемо дії, аналогічні до проведених у розділі 1. При аналізі системи (3), зафіксувавши час θ , отримаємо ті ж самі співвідношення (4), (5), але вираз x_3^0 з урахуванням цих співвідношень тепер набуде вигляду:

$$\begin{aligned} x_3^0 = & \frac{9(x_1^0)^2 x_2^0}{35} + \frac{54(x_2^0)^3}{35\theta^2} + \frac{18x_1^0(x_2^0)^2}{35\theta} - \frac{2(x_1^0)^3 \theta}{35} + \\ & + a \left(\frac{x_1^0 x_2^0 \theta^3}{70} - \frac{(x_1^0)^2 \theta^4}{840} \right) + \frac{a^2 x_2^0 \theta^6}{2520} \end{aligned}$$

Зауважимо, що в цьому випадку, на відміну від задачі 1, дріб $\frac{x_2^0 \theta^6}{2520}$ може приймати як додатні значення, так і від'ємні, а також дорівнювати нулю при $x_2^0 = 0$. Тож, у залежності від значення x_2^0 , розглянемо різні випадки:

$x_2^0 > 0$: представимо x_3^0 у такому вигляді (подібному до (6), але без урахування знаку):

$$x_3^0 = Q_0 + Q_1 a + Q_2 a^2 = \left(\sqrt{Q_2} a + \frac{Q_1}{2\sqrt{Q_2}} \right)^2 + \left(Q_0 - \frac{Q_1^2}{4Q_2} \right) \quad (11)$$

Таким чином, проаналізуємо другий доданок $\left(Q_0 - \frac{Q_1^2}{4Q_2} \right)$, який у цьому випадку має вигляд:

$$\frac{1728(x_2^0)^4 + 576x_1^0(x_2^0)^3\theta + 144(x_1^0)^2(x_2^0)^2\theta^2 - 40(x_1^0)^3x_2^0\theta^3 - (x_1^0)^4\theta^4}{1120x_2^0\theta^2}.$$

Якщо $x_3^0 \geq Q_0 - \frac{Q_1^2}{4Q_2}$, то знайдемо параметр a , який задовольняє рівності

(11) і дозволяє знайти відповідне керування $u(t)$. Зауважимо, що, як і в задачі

1, є випадки, коли існують два різні керування, які є розв'язками задачі керованості (10).

$x_2^0 = 0$: оскільки коефіцієнт при a^2 набуває нульового значення, вираз x_3^0 можна спростити до такого: $x_3^0 = S_0 + S_1 a$, і, якщо $x_1^0 \neq 0$, звідси можна знайти значення a , яке задовольняє рівності (11);

$x_2^0 < 0$: представимо x_3^0 у вигляді, аналогічному до (6):

$$x_3^0 = -(S_0 + S_1 a + S_2 a^2) = -\left(\sqrt{S_2} a + \frac{S_1}{2\sqrt{S_2}}\right)^2 - \left(S_0 - \frac{S_1^2}{4S_2}\right). \quad (12)$$

Аналогічно до випадку $x_2^0 > 0$ розглянемо вираз $-\left(S_0 - \frac{S_1^2}{4S_2}\right)$. Він зводиться до такого самого вигляду:

$$\begin{aligned} -\left(S_0 - \frac{S_1^2}{4S_2}\right) &= -S_0 - \frac{(-S_1)^2}{4(-S_2)} = Q_0 - \frac{Q_1^2}{4Q_2} = \\ &= \frac{1728(x_2^0)^4 + 576x_1^0(x_2^0)^3\theta + 144(x_1^0)^2(x_2^0)^2\theta^2 - 40(x_1^0)^3x_2^0\theta^3 - (x_1^0)^4\theta^4}{1120x_2^0\theta^2} \end{aligned}$$

У цьому випадку, якщо $x_3^0 \leq Q_0 - \frac{Q_1^2}{4Q_2}$, то з рівності (12) знайдемо a .

Перейдемо до розгляду нерівностей

$$x_3^0 \geq Q_0 - \frac{Q_1^2}{4Q_2}, \quad x_3^0 \leq Q_0 - \frac{Q_1^2}{4Q_2}$$

при $x_2^0 > 0$ або $x_2^0 < 0$ відповідно. Насправді, обидві нерівності неважко звести до однієї:

$$\begin{aligned} 1728(x_2^0)^4 + 576x_1^0(x_2^0)^3\theta + (144(x_1^0)^2(x_2^0)^2 - 1120x_2^0x_3^0)\theta^2 - \\ - 40(x_1^0)^3x_2^0\theta^3 - (x_1^0)^4\theta^4 \leq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Отже, при фіксованому θ розв'язки задачі керованості системи (10) існують для тих точок (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , для яких виконується нерівність (13). Якщо ж не фіксувати θ , то, розглядаючи ліву частину нерівності за умови, що $x_1^0 \neq 0$, доходимо висновку, що, оскільки вона є многочленом 4-го степеня від θ , а коефіцієнт при θ^4 від'ємний, то при $x_1^0 \neq 0$, $x_2^0 \neq 0$ нерівність (13) матиме дійсні додатні розв'язки відносно θ .

Таким чином, з усього вищезазначеного можемо сформулювати теорему:

Теорема 2. Задача керованості в системі (10) з керуваннями вигляду $u(t) = at^2 + bt + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ без обмежень на час має розв'язки для будь-якої початкової точки (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , для якої $x_1^0 \neq 0$, $x_2^0 \neq 0$.

Випадки, коли $x_1^0 = 0$ або $x_2^0 = 0$, можуть потребувати додаткового аналізу.

Знаходження розв'язків.

Алгоритм знаходження розв'язків задачі керованості в системі (10) подібний до наведеного в розділі 1:

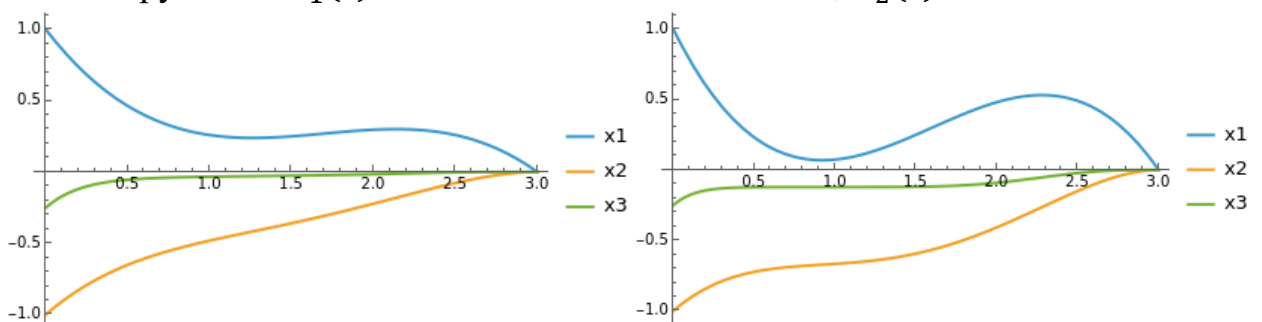
- 1) Для заданої точки $x(0) = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ знаходимо множину додатних розв'язків нерівності (13);
- 2) Задаємо θ з множини додатних розв'язків нерівності (13);
- 3) При заданих $x(0)$ і θ знаходимо a з рівності (11) або (12) у залежності від знаку x_2^0 ;
- 4) За знайденим значенням a визначаємо шукані керування $u(t)$.

Приклади.

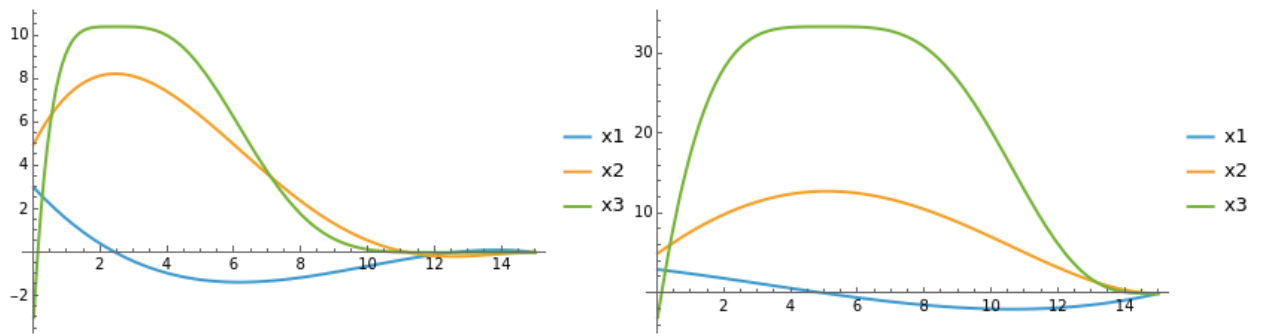
Наведемо деякі приклади знаходження розв'язків задачі керованості (10):

- 1) $x(0) = \left(1, -1, -\frac{1}{4}\right)$:

Множина додатних розв'язків нерівності (13) має вигляд $[2.543, 5.272] \cup [35.788, +\infty)$. Задавши $\theta = 3$, отримаємо два керування: $u_1(t) \approx -0.556 t^2 + 1.889 t - 1.5$; $u_2(t) \approx -1.111 t^2 +$



Мал. 4. Графіки компонент траєкторій для $x(0) = \left(1, -1, -\frac{1}{4}\right)$ для керувань $u_1(t)$ (зліва) та $u_2(t)$ (справа) при заданому часі $\theta = 3$.



Мал. 5. Графіки компонент траєкторій для $x(0) = (3, 5, -3)$ для керувань $u_1(t)$ (зліва) та $u_2(t)$ (справа) при заданому часі $\theta = 15$.

$+3.556 t - 2.333$. Графіки залежності компонент від часу зображені на малюнку 4.

2) $x(0) = (3, 5, -3)$:

Для додатних розв'язків нерівності (12) виконується умова $\theta \geq 11.826$.

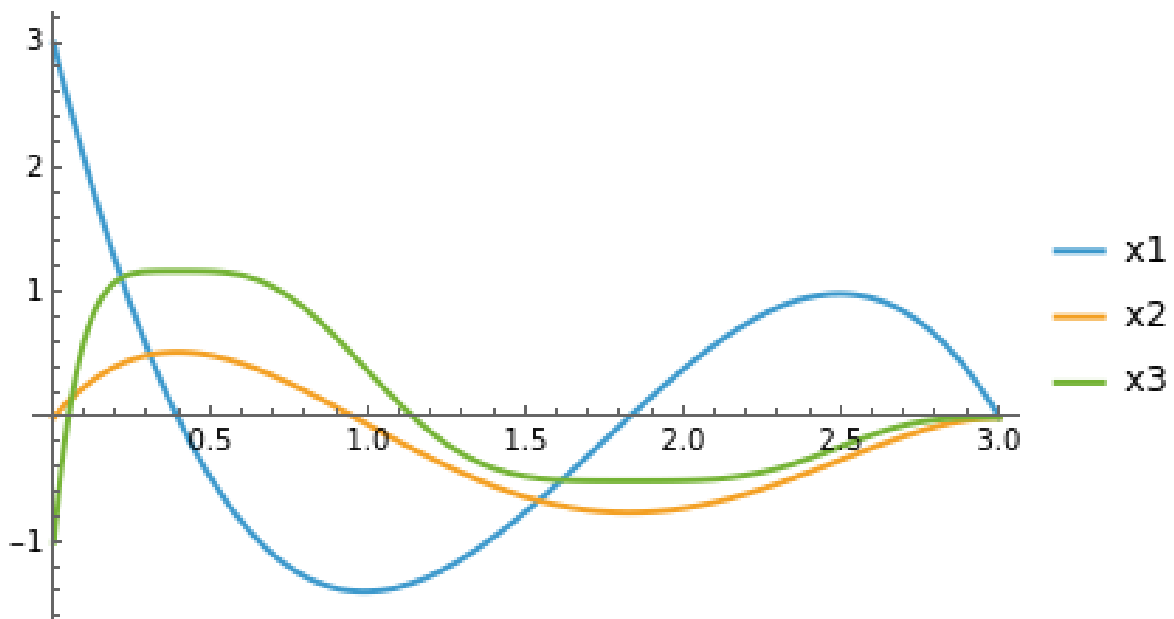
Задавши $\theta = 15$, отримаємо два керування: $u_1(t) \approx -0.020 t^2 +$

$+0.392 t - 1.669$; $u_2(t) \approx 0.012 t^2 - 0.076 t - 0.498$. Графіки

залежності компонент від часу зображені на малюнку 5.

3) Знову розглянемо $x(0) = (3, 5, -3)$, але задамо $\theta = 8$. Це значення θ не входить у множину розв'язків нерівності (13) при заданому $x(0)$, тож розв'язків за час $\theta = 8$ ця задача не має.

4) $x(0) = (3, 0, -1)$:



Малюнок 6. Графіки компонент траєкторії для $x(0) = (3, 0, -1)$ при заданому часі $\theta = 3$.

Оскільки $x_2^0 = 0$, пошук розв'язків зводиться до розв'язання рівняння $x_3^0 = S_0 + S_1 a$. У цьому випадку, задавши $\theta = 3$, отримаємо один розв'язок, який задає керування $u(t) \approx -4.181 t^2 + 14.543 t - 10.272$. Графіки компонент можна побачити на малюнку 6.

5) $x(0) = (0, 1, -3)$:

Оскільки $x_1^0 = 0$, нерівність (13) зводиться до такої:

$$1728(x_2^0)^4 - 1120x_2^0x_3^0\theta^2 \leq 0,$$

яка при заданих x_2^0 і x_3^0 не має дійсних розв'язків відносно θ , отже, задача керованості (10) для цієї початкової точки не має розв'язків.

Використані джерела.

1. Korobov V.I. Almost linearizable control systems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*. 2021. V. 33 (3). P. 473-497.
2. Korobov V.I., Sklyar K.V., Ignatovich S.Yu. Almost feedback linearizable systems of the class C1 and solving the constructive controllability problem. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. 2024. V. 41 (2). P. 356-377.
3. Ignatovich S.Yu. Explicit solution of the time-optimal control problem for one nonlinear three-dimensional system. *Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University, ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"*. 2016. V.83. P. 21-46.
4. Sklyar G.M., Ignatovich S.Yu., Shugaryov S.E. Time-Optimal Control Problem for a Special Class of Control Systems: Optimal Controls and Approximation in the Sense of Time Optimality. *J Optim Theory Appl*. 2015. V.165. P. 62-77.
5. Sklyar G.M., Ignatovich S.Yu. Approximation of time-optimal control problems via nonlinear power moment problems, *SIAM J. Control Optim.* 2003. V. 42 (4). P. 1325-1346.
6. Sastry, S. Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control. 1999.